

## ÇALIŞMA SORULARI-2

1. Aşağıdaki katsayı matrisi ve sağ taraf vektörü verilen  $Ax = b$  lineer denklem sistemlerini Gauss eliminasyon (satırca eşelon veya satırca indirgenmiş eşelon form) ile çözünüz.

a.  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix}$ ,  $b = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix}$

b.  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

c.  $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 \\ -3 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & -8 \end{bmatrix}$ ,  $b = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$

d.  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 5 & -4 \end{bmatrix}$ ,  $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$

2.  $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$  ve  $B = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 3 & k \end{bmatrix}$  matrisleri veriliyor.  $k$ 'nin hangi değeri(leri) için  $AB = BA$  dir.

3.  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$  ve  $AB = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 6 & -9 & 3 \end{bmatrix}$  matrisleri veriliyor.  $B$ 'nin birinci ve ikinci sütunlarını bulunuz.

4. Aşağıdaki matrislerin terslerini (varsa) bulunuz.

a.  $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$

b.  $\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -7 & -5 \end{bmatrix}$

c.  $\begin{bmatrix} 3 & 2/7 \\ -7 & -1/3 \end{bmatrix}$

5. Kabul edelim ki  $P$  tersinir bir matris ve  $A = PBP^{-1}$ .  $B$ 'yi  $A$  cinsinden çözünüz.

6.  $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$  matrisi ve  $x = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$  vektörü veriliyor.  $(Ax)^T$ ,  $x^T A^T$ ,  $xx^T$  ve  $x^T x$  leri hesaplayınız.

7. Verilen denklem sistemlerinin ilaveli matrislerini bulunuz.

$$3x_1 - 2x_2 = -1$$

a.  $4x_1 + 5x_2 = 3$

$$7x_1 + 3x_2 = 2$$

$$x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 = 1$$

b.  $3x_2 + x_3 - x_5 = 2$

$$x_3 + 7x_4 = 1$$

$$2x_1 + 2x_3 = 1$$

c.  $3x_1 - x_2 + 4x_3 = 7$

$$6x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

8. 
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 = -1 \\ 5x_3 + 10x_4 + 15x_6 = 5 \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 = 6 \end{cases}$$
 denklem sistemini Gauss-Jordan yok etme metodu (satırca indirgenmiş eşelon form) ile çözünüz.

9. 
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 = 0 \\ 5x_3 + 10x_4 + 15x_6 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 = 0 \end{cases}$$
 homojen denklem sistemini Gauss-Jordan yok etme metodu (satırca indirgenmiş eşelon form) ile çözünüz.

10. Aşağıdaki matrisleri ele alalım.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Aşağıda her bir şıkta verilen ifadeyi yukarıda verilen matrisler için (mümkünse) hesaplayınız.

a.  $D + E$

b.  $2B - C$

c.  $-3(D + 2E)$

d.  $\frac{1}{2}C^T - \frac{1}{4}A$

e.  $(2E^T - 3D^T)^T$

f.  $(CD)E$

g.  $CC^T$

h.  $(C^T B)A^T$

- i.  $(AB)C$
- j.  $(BA^T - 2C)^T$
- k.  $B^T(CC^T - A^T A)$
- l.  $(2D^T - E)A$
- m.  $D^T E^T - (ED)^T$
- n.  $(D - E)^T$
- o.  $C(BA)$

11.  $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$  matrisinin tersini bulunuz.

12.  $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) & \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\ \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) & \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \end{bmatrix}$  matrisinin tersini bulunuz.

13.  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$  matrisi için, aşağıdakileri hesaplayınız.

- a.  $A^3$
- b.  $A^{-3}$
- c.  $A^2 - 2A + I$  ( $I$  birim matris)

14. Aşağıdaki ifadeleri sadeleştiriniz.

- a.  $(AB)^{-1}(AC^{-1})(D^{-1}C^{-1})^{-1}D^{-1}$
- b.  $(AC^{-1})^{-1}(AC^{-1})(AC^{-1})^{-1}AD^{-1}$

15. Eğer  $p(x) = x^2 - (a+d)x + (ad - bc)$  ve  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  ise  $p(A) = 0$  olduğunu gösteriniz.

16. Bir  $A$  kare matrisine,  $A^2 = A$  ise **idempotent** denir.  $A$  idempotent ise  $I - A$  nında idempotent olduğunu gösteriniz. ( $I$  birim matris)

17.  $p(x) = x^2 - 2x - 3$  ve  $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$  olmak üzere,  $p(A)$  'yı bulunuz.

18. Aşağıda katsayı matrisleri verilen  $Ax = b$  sistemleri Cramer metodu ile çözünüz.

e.  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix}$

f.  $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

g.  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

h.  $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$

19. Verilen denklem sistemlerini Cramer metodu ile çözünüz.

a. 
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

b. 
$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 = 7 \end{cases}$$

c. 
$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 3 \\ -4x_1 + 6x_2 = -5 \end{cases}$$

20. Aşağıdaki matrislerin terslerini (varsa) adjoint (eki) yöntemi ile bulunuz.

d.  $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

e.  $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

f.  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

21. Aşağıdaki vektörlerin lineer bağımlı veya bağımsız olup olmadığını gösteriniz.

a.  $u_1 = (-1, 2, 3), u_2 = (2, -4, -6), u_3 = (-2, -3, -4)$

b.  $u_1 = (0, 0, 2, 2), u_2 = (3, 3, 0, 0), u_3 = (1, 1, 0, -1)$

c.  $v_1 = (4, -1, 2), v_2 = (-4, 10, 2)$

d.  $u_1 = (-3, 0, 4), u_2 = (5, -1, 2), u_3 = (1, 1, 3)$

22. Wronskian determinant testini kullanarak  $f_1(x) = e^x, f_2(x) = xe^x, f_3(x) = x^2e^x$  fonksiyonlarının  $(-\infty, \infty)$  aralığında lineer bağımsız olduğunu gösteriniz.

23. Wronskian determinant testini kullanarak  $f_1(x) = 1, f_2(x) = x, f_3(x) = e^x$  fonksiyonlarının  $(-\infty, \infty)$  aralığında lineer bağımsız olduğunu gösteriniz.

24. Wronskian determinant testini kullanarak  $f_1(x) = \sin x, f_2(x) = \cos x, f_3(x) = x \cos x$  fonksiyonlarının  $(-\infty, \infty)$  aralığında lineer bağımsız olduğunu gösteriniz.

25.  $v_1 = (1, 2, 3, 4), v_2 = (0, 1, 0, -1)$  ve  $v_3 = (1, 3, 3, 3)$  vektörlerinin  $\mathbb{R}^4$  'te lineer bağımlı olduğunu gösteriniz.

26. 8. soruda verilen her bir vektörü diğer ikisinin bir lineer kombinasyonu olarak ifade ediniz.

27.  $P_3$  üzerindeki  $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx$  iç çarpımı kullanarak  $\langle p, q \rangle$  yu hesaplayınız.

a.  $p = 1 - x + x^2 + 5x^3, q = x - 3x^2$

b.  $p = x - 5x^3, q = 2 + 8x^2$

28.  $u, v$  ve  $w$  vektörlerinin aşağıdaki eşitlikleri sağladığını varsayalım.

$$\langle u, v \rangle = 2, \langle v, w \rangle = -3, \langle u, w \rangle = 5$$

$$\|u\| = 1, \|v\| = 2, \|w\| = 7$$

Aşağıda verilen ifadeleri hesaplayınız.

a.  $\langle u + v, v + w \rangle$

b.  $\langle 2v - w, 3u + 2w \rangle$

c.  $\langle u - v - 2w, 4u + v \rangle$

d.  $\|u + v\|$

e.  $\|2w - v\|$

f.  $\|u - 2v + 4w\|$

29. Euclid iç çarpımını kullanarak aşağıda verilen vektörlerin Cauchy - Schwarz eşitsizliğini sağladığını gösteriniz.

d.  $u = (3, 2), v = (4, -1)$

e.  $u = (-3, 1, 0), v = (2, -1, 3)$

f.  $u = (0, -2, 2, 1), v = (-1, -1, 1, 1)$

30. 
$$\begin{vmatrix} \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ -\cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) - \cos(\theta) & \sin(\theta) + \cos(\theta) & 1 \end{vmatrix}$$
 determinant değerinin  $\theta$  dan bağımsız olduğunu gösteriniz.

31.  $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ,  $k = 2$  için  $\det(kA) = k^n \det(A)$  olduğunu doğrulayınız.

32.  $A = \begin{bmatrix} k-3 & -2 \\ -2 & k-2 \end{bmatrix}$  matrisinin tersi alınabilir olması için  $k$  ne olmalıdır ? Bulunuz.

33.  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ k & 1 & k \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$  matrisinin tersi alınabilir olması için  $k$  ne olmalıdır ? Bulunuz.

34.  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$  ve  $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  için  $\det(AB) = \det(BA)$  olduğunu doğrulayınız.

35.  $A$ , bir  $4 \times 4$  boyutunda bir matris ve  $\det(A) = -2$  olmak üzere, aşağıdakileri hesaplayınız.

- $\det(-A)$
- $\det(A^{-1})$
- $\det(2A^T)$
- $\det(A^3)$

TOBB MAT 203 Çalışma Soruları-II